

ANDERSON LOCALIZATION

Dalila Rivero

dalilarr@gmail.com

Physics Institute of São Carlos, University of São Paulo, 13566-590 São Carlos, SP, Brazil
19 de junho de 2018

Como parte da matéria de eletromagnetismo e a modo informativo explora-se neste resumo o fenômeno de Anderson Localization, o qual basea-se num fenômeno quântico que influencia em certo regime a propriedade de condutividade dos metais (em primeira aproximação) mas que consegue prever o comportamento "condutivo" de ondas, no termo mais amplo da palavra. Será apresentado um esboço da matemática usada para descrever o fenômeno e também discorreremos acerca de alguns dos experimentos mais relevantes relacionados a este.

A teoria clássica da **condutividade eletrônica** de Drude (1900) foi construída com base na idéia de que elétrons livres são espalhados por íons positivos numa rede. Um conceito chave nessa descrição é o do caminho livre médio ℓ ($\ell = v\tau$), ou seja, o comprimento médio que um elétron viaja antes de colidir com um íon. Em vista de que a condutividade é diretamente proporcional ao tempo médio entre as colisões ($\sigma = e^2 n \tau / m$ com n a densidade de partículas) concluímos que esta deve ser diretamente proporcional a ℓ . [1]

Com a descoberta da mecânica quântica entendeu-se o motivo pelo qual os elétrons aparentemente não se dispersam de íons que ocupam sítios de rede regulares: o caráter ondulatório destes faz com que o elétron difracte de um cristal ideal. A resistência aparece apenas quando os elétrons se dispersam pelas imperfeições do cristal. Com essa revisão o modelo de Drude ainda pode ser usado, mas um elétron é visto como "zig-zagueando" entre as impurezas de forma que quanto maior for o número de impurezas menor o caminho livre médio e, por conseguinte, menor a condutividade. [2]

1 Localização de Anderson

Philip Warren Anderson em 1958 propõe uma teoria que leva em conta a influência destas impurezas e defeitos na condutividade assim estabelecendo que a desordem produzida na rede pode fazer com que um elétron fique imóvel [3] de modo que transições metal-isolante poderiam ser explicadas. Esta localização é produto da **interferência** de muitos espalhamentos das funções de onda do elétron.

Anderson considerou um modelo de ligação forte de elétrons em uma rede cristalina, com níveis de energia em cada ponto distribuídos aleatoriamente. A visão tradicional tem sido que a dispersão pelo potencial aleatório faz com que as ondas de Bloch percam momento na escala de comprimento do caminho livre médio [4]. No entanto, acreditava-se que a função de onda permanecesse estendida por toda a amostra (ver figura 1.a). Anderson ressaltou que se a desordem é sufici-

entemente forte as partículas podem ficar localizadas na medida em que o envelope da função de onda $\psi(r)$ decai exponencialmente de algum ponto r_0 no espaço, $|\psi(r)| \sim \exp(-|r - r_0|/\xi)$, onde ξ é a longitude da localização.

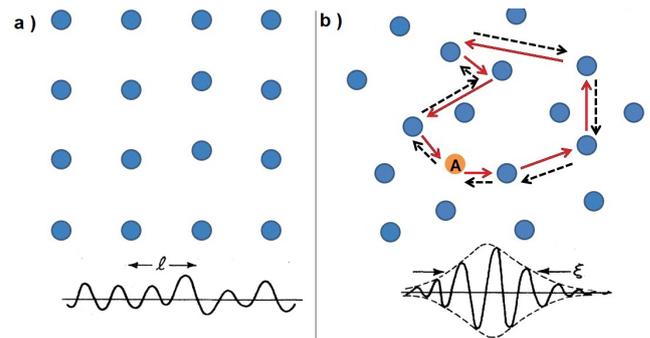


Figura 1: a) Função de Bloch num cristal quase perfeito com estado estendido e caminho livre médio ℓ , b) Efeitos da interferência na propagação das ondas num meio desordenado, estado localizado com comprimento de localização ξ

2 Intuição e algumas equações para entender o modelo

Para entender como a localização ocorre pode-se começar com mecânica elementar das ondas e a descrição da **localização fraca**, onde efeitos de interferência de ondas são mais claramente vistos no limite de *dispersão fraca*. Embora seja difícil observar a localização completa em temperaturas finitas T devido ao efeito das interações que limitam a coerência de fase, o efeito dramático da localização é visível para T finitos na forma de "localização fraca".

2.1 Localização fraca

Suponha que um elétron se propague em um meio desordenado (ver figura 1.b) Para obter a probabilidade

total de que o elétron chegue em um ponto devem-se somar as amplitudes de todos os caminhos possíveis e elevar ao quadrado o resultado final com valor complexo. Esta probabilidade consiste de uma soma de termos quadrados além de muitos termos de interferência de produto cruzado. Pode-se ingenuamente argumentar que, em meios desordenados, as fases dos termos de interferência são tão aleatórias que sua soma desaparece. Contudo, esta suposição não está bem justificada, como será exibido a seguir.

Considere uma onda viajando em um meio desordenado tendo a posição \mathbf{A} como ponto de partida. Um caminho aleatório de luz que retorna à fonte de luz pode ser seguido em duas direções opostas (setas pretas pontadas e vermelhas da figura 1.b). As duas ondas que se propagam em direções opostas ao longo desse loop adquirem a mesma fase e, portanto, interferem construtivamente em \mathbf{A} [5]. Sejam as amplitudes de probabilidade A_i para o pacote de onda que se move do ponto \mathbf{A} ao longo de algum caminho C_i de volta para \mathbf{A} . A probabilidade de transição para a partícula se mover ao longo de C_1 ou C_2 será eq.1 [6].

$$w = |A_1 + A_2|^2 = \underbrace{|A_1|^2 + |A_2|^2}_{w_{cl}} + \underbrace{2Re(A_1^* A_2)}_{w_{int}} \quad (1)$$

Para quaisquer dois caminhos, o termo de interferência w_{int} pode ser positivo ou negativo e, por conseguinte, a média é zero. Entretanto, se $A_2 = A_{tr}$ sendo A_{tr} a amplitude do tempo-reverso do caminho C_1 , então, a probabilidade de retorno w é aumentada por um fator de dois em comparação com a probabilidade w_{cl} de um sistema clássico:

$$w = 4|A|^2 = 2w_{cl} \quad (2)$$

Isso leva a uma redução da probabilidade da onda se transmitir, o que significa que o coeficiente de difusão (D) e a condutividade (σ) também se reduzem. Essa variação da condutividade é igual à probabilidade de interferência de dois pacotes de comprimento de onda λ depois de retornarem ao ponto de partida. A probabilidade infinitesimal de retorno à origem no tempo t de uma difusão de partículas na dimensão d é dada por $(4\pi Dt)^{-d/2} d^3r$ [7]. Uma vez que o elemento de volume da interferência no intervalo de tempo $[t, t + dt]$ é $\lambda^{d-1} v dt$ encontra-se a correção quântica para a condutividade $\delta\sigma$ como: [4]

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \approx - \int_{\tau}^{\tau\phi} \frac{v\lambda^{d-1} dt}{(4\pi Dt)^{d/2}} = \begin{cases} -c_3 \frac{\lambda^2}{\ell^2} (1 - \frac{\tau}{\tau\phi}) & : d = 3 \\ -c_2 \frac{\lambda}{\ell} \ln(\tau\phi/\tau) & : d = 2 \\ -c_1 (\sqrt{\frac{\tau\phi}{\tau}} - 1) & : d = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Aqui $D = \frac{1}{d} v^2 \tau$ e c_i são constantes de ordem da unidade. O limite superior da integral é o tempo de relaxação de fase $\tau\phi$, ou seja, o tempo médio após o qual a coerência de fase é perdida devido a processos inelásticos ou outros processos de mudança de fase.

Para que existam processos de **localização fraca**, a desigualdade $\tau\phi \gg \tau$ deve ser mantida. Note que a

correção em três e duas dimensões depende da relação entre o comprimento de onda e o caminho livre médio (λ/ℓ), e se torna menor no limite de desordem fraca, onde $\lambda/\ell \ll 1$. Em duas e uma dimensão a correção aumenta no limite $\tau/\tau\phi \rightarrow 0$, já que se espera que a taxa de relaxação de fase $1/\tau\phi$ para um sistema em equilíbrio termodinâmico vá para zero em $T \rightarrow 0$.

Com $\tau/\tau\phi \rightarrow 0$ para $T \rightarrow 0$, a correção quântica de localização fraca será grande em qualquer sistema em $d = 1, 2$, não importa quão fraca seja a desordem, sinalizando o fato de que não há estados estendidos em dimensões $d = 1, 2$. O comprimento característico L_ϕ sobre o qual um pacote de ondas retém a coerência de fase está relacionado com $\tau\phi$ pelo coeficiente de difusão $L_\phi = \sqrt{D\tau\phi}$. Em sistemas de dimensão restrita, como filmes de espessura a ou fios de diâmetro a , a dimensionalidade efetiva do sistema em relação à localização é determinada pela razão L_ϕ/a . Ou seja, para $L_\phi \ll a$ o sistema é tridimensional (3d), enquanto para $L_\phi \gg a$ uma difusão ao longo do tempo $\tau\phi$ ocorre na geometria restrita do filme ou fio, e a dimensão efetiva é, portanto, 2 ou 1 [6].

2.2 Localização forte e transição de Anderson

A aparição de estados localizados é facilmente entendida no limite de desordem muito forte: do fato de que orbitais localizados existirão segue que em posições onde o potencial aleatório forma um poço profundo a hibridação dos orbitais adjacentes pelas amplitudes de tunelamento causa apenas uma perturbação que não desloca a partícula. A razão para isto é que os orbitais próximos terão energias suficientemente diferentes de modo que a quantidade de hibridação seja pequena. Por outro lado, os orbitais próximos em energia estarão, em geral, espacialmente distantes, de modo que sua sobreposição é exponencialmente pequena. Assim, podemos esperar que as funções de onda em sistemas fortemente desordenados sejam localizadas exponencialmente. Em geral, estados localizados e estendidos da mesma energia não coexistem, já que em uma situação típica qualquer pequena perturbação levaria à hibridação e, portanto, à deslocalização de um estado localizado.

Para força de desordem crescente η , haverá então uma transição brusca de estados deslocalizados para localizados em uma força de desordem crítica η_c . Um critério qualitativo para quando uma **transição de Anderson** é esperada em sistemas 3D é dada pelo critério Ioffe-Regel que afirma que, como o caminho livre médio torna-se mais curto com o aumento da desordem, a transição de Anderson ocorre quando $\ell \approx \lambda$ da partícula (o que equivale à condição $k\ell \approx 1$).

Este critério tem trazido muita discussão ao redor. Um dos maiores argumentos em contra foi o do Mott que defendia que ℓ de um elétron condutor nunca poderia ser menor que o parâmetro de rede, já que "Não resta muito mais "onda" para uma onda cujo caminho livre médio tenha se tornado mais curto que seu comprimento de onda".

Em sistemas $1d$ ou $2d$, o ℓ pode ser muito mais longo do que λ e as partículas são localizadas. De fato, o ℓ relevante é aquele relativo à transferência de momento. Uma situação semelhante existe quando a força da desordem é fixada, mas varia-se a energia. Neste caso espera-se que os elétrons nos estados próximos à parte inferior da banda de energia estejam localizados mesmo por um potencial fracamente desordenado, enquanto os elétrons nos estados próximos ao centro da banda (em $d = 3$) serão deslocados, desde que a desordem não seja muito forte. Assim, existe uma energia crítica E_c separando estados localizados e deslocalizados, chamada de borda de mobilidade. A mobilidade de elétrons como uma função da energia é identicamente zero no lado localizado (em $T = 0$), e aumenta continuamente com a separação da energia $|E - E_c|$ na fase deslocalizada ou metálica. O caráter contínuo desta transição de fase quântica, denominada **transição de Anderson**, é uma consequência da teoria de dimensionamento

A transição de localização de Anderson é uma transição de fase quântica, ou seja, uma transição a uma temperatura zero ajustada por um parâmetro de controle, (η, E ou ν). Ao contrário de outras transições de fase quânticas, a transição de Anderson não possui um parâmetro de ordem óbvio. No entanto, existe uma "teoria de dimensionalidade" que associa este com o comprimento de localização ou correlação ξ , que tende ao infinito à medida que a transição se aproxima [6].

2.3 Teoria de dimensionamento

Wegner[8] argumentou que a transição de localização de Anderson deveria ser descrita na linguagem de fenômenos críticos de transições de fase contínuas (quânticas). Isso requer a suposição de um comprimento de correlação ξ divergente em função da força de desordem η no ponto crítico.

$$\xi(\eta) \sim |\eta - \eta_c|^{-\nu} \quad (4)$$

Espera-se então que a condutividade obedeça a lei de dimensionamento:

$$\sigma(\eta) \sim \xi^{2-d} \sim (\eta_c - \eta)^s \quad \text{para } \eta < \eta_c, d > 2 \quad (5)$$

Isso decorre do fato de que σ , escrito em unidades de $e^2/(2\pi\hbar)$, Tem dimensão $(1/\text{comprimento})^{d-2}$, e o único comprimento característico próximo à transição é o comprimento de correlação ξ . Ao comparar o expoente de condutividade s com o expoente de ξ encontra-se que:

$$s = \nu(d - 2) \quad (6)$$

Por outro lado, a condutância g de um cubo d -dimensional de comprimento L , que para um bom metal de condutividade σ é dado por $g(L) = \sigma L^{d-2}$, deve

obedecer a propriedade de dimensionamento

$$g(\eta; L) = \Phi(L/\xi) \quad (7)$$

onde Φ é uma função determinada inteiramente por β . Isto significa que g é uma função de um único parâmetro L/ξ e cada valor de L/ξ corresponde com um valor de g . Segue que g obedece a equação de renormalização de grupo (RG). Escreve-se que:

$$\frac{d \ln(g)}{d \ln(L)} = \beta(g) \quad (8)$$

Onde $\beta(g)$ é uma função só de g e não depende da desordem. Nós realmente não sabemos β em geral, mas podemos calculá-lo para g grande, ou seja, no limite metálico (deslocado) e também no limite onde g é pequeno, isto é, no limite de localização forte. Em um artigo excepcional escrito pela "ganga dos 4", Abrahams, Anderson, Licciardello e Ramakrishnan [9] propuseram a equação 8 e calcularam a função β nos limites da desordem fraca e forte. Uma confirmação da suposição de dimensionamento foi obtida a partir de um cálculo do termo de próxima ordem. Assim, para sistemas com alto nível de desordem espera-se que todos os estados estejam localizados, com um comprimento médio de localização ξ . Então $g(L)$ é uma função de L que decresce exponencialmente.

$$g(L) \sim \exp(-L/\xi) \quad (9)$$

Em comparação com a dependência ôhmica $g \sim L^{d-2}$, este é um comportamento muito não ôhmico. A função β é então dada por:

$$\beta(g) \sim \ln(g/g_c) < 0 \quad (10)$$

Na desordem fraca encontra-se de $g \sim L^{d-2}$ que:

$$\beta(g) = d - 2 \quad (11)$$

A pergunta importante é a de se o sistema é deslocalizado (metal) ou localizado (isolante) e pode ser respondida integrando a equação RG (8) de algum ponto inicial L_0 , onde $g(L_0)$ é conhecido. Dependendo de se $\beta(g)$ é positivo ou negativo ao longo do caminho de integração, a condutância será dimensionada para infinito ou para zero, pois L vai para infinito. Um esboço gráfico deste comportamento pode ser apreciado na figura 2.

Em $d = 3$ dimensões, um tem $\beta(g) > 0$ para g grande, mas $\beta(g) < 0$ em g pequeno. Assim, existe um ponto crítico em $g = g_c$, onde $\beta(g_c) = 0$, que separa o comportamento localizado e o deslocalizado.

Por outro lado, em $d = 1$ dimensão, tem-se que $\beta(g) < 0$ tanto para valores grandes e menores de g , e por interpolação também para valores intermediários de g , de modo que não há transição neste caso e todos os estados são localizados.

A dimensão $d = 2$ aparentemente desempenha um papel especial, como neste caso $\beta(g) \rightarrow 0$ para $g \rightarrow \infty$. Para determinar $\beta > 0$ ou $\beta < 0$ para g grande é necessário calcular as correções dependentes da escala (isto

é, dependentes de L) para o resultado do Drude em g grande. Esta é precisamente a correção de localização fraca já mencionada acima. Para um sistema de comprimento finito $L < L_\phi$ devemos substituir $\frac{1}{\tau} = DL_\phi^{-2}$ na equação 3 por DL^{-2} , levando a:

$$g(L) = \sigma_0 - a \ln(L/\ell) \quad (12)$$

onde um cálculo diagramático dá $a = 2/\pi$ e $\sigma_0 = \ell/\lambda_F$ (em unidades de e^2/\hbar). Segue que $\beta(g) = -a/g$ para $d = 2$

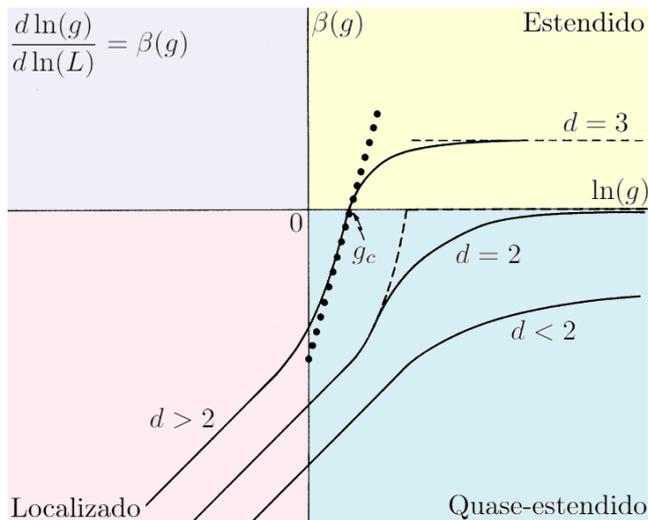


Figura 2: Gráfico de $\beta(g)$ vs $\ln(g)$ com $g(L)$ a "condutância local" normalizada. Sendo $\beta(g)$ a função de dimensionamento que descreve com qual expoente a condutância média cresce em função do tamanho do sistema (L) [9]

Assim, a função beta é positiva para condutores tridimensionais, zero para condutores bidimensionais e negativa em uma dimensão. No regime localizado, g decai exponencialmente com o tamanho da amostra, de modo que $\beta(g)$ é negativo. Em três dimensões, isso leva a um ponto crítico no qual β desaparece por algum valor especial para g associado à borda de mobilidade. Os sistemas de menor dimensão não passam por uma transição de fase genuína porque a condutância sempre diminui com o tamanho do sistema. Um pequeno condutor 2D, por exemplo, parecerá um metal no regime quase-estendido, mas todos os seus estados serão eventualmente localizados se o meio for grande o suficiente [5].

3 Experimentos

Por ser um fenômeno de interferência de ondas que leva a uma quebra da propagação em meios fortemente desordenados, Anderson Localization pode ocorrer -em princípio- para todos os tipos de ondas: som, microondas, luz ou "Schrödinger" (elétrons ou átomos a baixas temperaturas). Durante os últimos 30 anos a busca pela localização de Anderson em amostras desordenadas produziu uma série de observações experimentais

que, apesar de consideradas bem sucedidas num primeiro momento, acabaram sendo eventualmente refutadas por seus próprios autores, de maneira que apenas algumas dessas confirmações sobreviveram até agora. Mesmo assim, nesta seção também falarei sobre as boas tentativas fracassadas.

3.1 Elétron

Infelizmente, a localização eletrônica é diabolicamente difícil de se confirmar. Em 1988, Aart Pruisken [10] estabeleceu a conexão entre AL e o efeito Hall quântico inteiro. A condutância é constante com o campo magnético, mas subitamente sobe quando a energia de Fermi dos elétrons condutores se aproxima à dos níveis de Landau. O efeito Hall quântico poderia ser explicado se os elétrons fossem estendidos perto dos níveis de Landau, mas localizados em outros lugares. A equipe de Pruisken encontrou uma excelente oportunidade para testar a teoria de dimensionamento. Os processos térmicos afetam a fase dos elétrons e restringem sua coerência quântica ao longo de um comprimento finito. Então, mudando a temperatura, muda-se o tamanho da amostra explorada pelos elétrons. Entre as experiências feitas a equipe observou que a transição entre os plateaus exibiu uma dependência com a temperatura em belo acordo com teoria de dimensionamento.

3.2 Luz

Qualquer coisa translúcida difunde a luz difusamente. Durante anos, pesquisadores trabalharam com o pó de titânia [11] que é usado em tintas por suas propriedades de dispersão. Graças ao alto índice de refração do pó (cerca de 2.7) e ao tamanho de grão submicrométrico, os caminhos livres médios são da ordem de um comprimento de onda. Experimentos revelam sinais claros na quebra da difusão normal. Para observar a localização, o desafio é maximizar a dispersão sem introduzir absorção. A dependência de difusão da escala também é estudada usando técnicas resolvidas no tempo em que o material é excitado por uma fonte de femtosegundo pulsada. A evolução temporal da transmissão óptica pode ser medida até o nível de um fóton. Conforme o tempo aumenta, o tamanho da amostra é explorado pelas ondas. A difusão dependente da escala pode levar a uma constante de difusão dependente do tempo. Como resultado, a intensidade da transmissão deve cair a uma taxa lenta e não-exponencial. Em 2006, o grupo de Maret mediu o tempo na cauda até 40 ns em titânia em pó que teve valores surpreendentemente grandes para o caminho livre médio ($k\ell \approx 2.5$); eles encontraram apenas um decaimento de tempo não-exponencial na transmissão. Não obstante, mostrou-se que este comportamento é devido à fluorescência e não à localização de Anderson.

3.3 Microondas

Nos comprimentos de onda milimétricos das microondas, é relativamente fácil moldar partículas individuais,

como esferas de metal, que espalham fortemente. Colocando aleatoriamente as esferas em uma guia de ondas tubular com dimensão transversal na ordem de um caminho livre médio (tipicamente 5 cm). O início da localização é novamente regido pela condutância adimensional g , que aqui é essencialmente igual à razão entre o comprimento de localização e o comprimento da amostra. Usando microondas, Azriel Genack [12] e seus colegas exploraram uma ampla gama de valores de g , incluindo o regime localizado $g < 1$. De fato, suas observações de transmissão dependente de tempo anômalo, difusão dependente de escala, grandes flutuações na transmissão e correlações de longo alcance da intensidade e da condutância das microondas levaram a um quadro rico e completo da localização de Anderson em fios grossos.

3.4 Acústica

O ultra-som é particularmente adequado para estudos de localização dependentes do tempo, devido aos longos períodos de tempo em que a energia pode ser monitorada. Em 2008, John Page, Sergey Skipetrov [13] e colaboradores relataram a localização de ultrassonografia de Anderson em uma rede elástica 3D de contatos de alumínio.

3.5 Materiais de bandgap fotônico

Mordechai Segev [14] e colaboradores desenharam um experimento para localizar um pacote de ondas ao longo de duas direções transversais enquanto continuavam a se propagar ao longo do terceiro. Com base em uma previsão de Legendijk em 1989, a realização experimental de Segev significou que os pesquisadores puderam medir a localização no espaço ao invés de deduzí-la de um espectro de transmissão

3.6 Átomos frios

Quando os átomos são resfriados até quase a temperatura zero absoluta, seu comprimento de onda de Broglie se torna grande - frações de um micrômetro. Grupos de pesquisa em Palaiseau, na França, e em Florença, na Itália, observaram recentemente que a expansão de átomos ultrafrios em um potencial 1D desordenado pode ser interrompida - a primeira evidência para a localização de gases atômicos em Anderson em uma dimensão.

A localização tridimensional foi recentemente observada por pesquisadores franceses [15] usando átomos frios impulsados. O experimento, realizado por Julien Chabé e colegas em 2008, confirmou uma escala de um parâmetro em torno de uma borda de mobilidade e encontrou expoentes críticos consistentes com o modelo Anderson 3D.

4 Conclusões e perspectivas

Embora os conceitos fundamentais da localização de Anderson sejam bem compreendidos até agora, entre

as questões que ainda precisam ser respondidas está a análise das propriedades críticas perto da transição de Anderson.

A teoria auto-consistente da localização de Anderson é uma ferramenta versátil para a investigação desses problemas. Ela permite incorporar as características detalhadas do sistema, como a relação de dispersão de energia, a forma particular de desordem, a forma da amostra e a teoria autoconsistente de Anderson.

Como a localização de Anderson é um fenômeno de interferência de onda, as limitações de coerência de fase são um assunto importante de estudo neste contexto. Até agora, a localização de Anderson foi observada em muitos sistemas diferentes, sem dúvida. Por outro lado, a observação da transição de Anderson em si é uma tarefa muito mais desafiadora. Aqui, as investigações recentes de ondas clássicas e ondas de matéria atômica oferecem novas perspectivas fascinantes que certamente nos levarão a uma compreensão mais profunda do fenômeno de localização.

Como opinião pessoal e dando uma perspectiva geral do assunto acredito que a localização de Anderson vai continuar sendo um fenômeno que poderia incursionar em mais campos da ciência dando resposta (ou criando mais interrogações) ao redor de diferentes fenômenos. Especialmente, acho importante a realização de experiências em ondas acústicas (vibração) e suas variantes posto que as vantagens tecnológicas que materiais com condutividade térmica "tunable" poderiam trazer seriam maravilhosas.

Referências

- [1] In: Drude model. Wikimedia; 2018. Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/Drude_model.
- [2] In: Free electron model. Wikimedia; 2018. Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/Free_electron_model.
- [3] Anderson PW. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review*. 1958 mar;109(5):1492–1505. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>.
- [4] Kramer B, Bergmann G, Bruynseraede Y. Localization, Interaction, and Transport Phenomena in Impure Metals. An Introduction. In: Kramer B, Bergmann G, Bruynseraede Y, editors. Localization, Interaction, and Transport Phenomena. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 1985. p. 1–10.
- [5] Wiersma DS, Bartolini P, Legendijk A, Righini R. Localization of light in a disordered medium. *Nature*. 1997 dec;390(6661):671–673. Available from: <http://www.nature.com/articles/37757>.
- [6] Wölflé P, Vollhardt D. Self-Consistent Theory of Anderson Localization: General formalism and applications. In: 50 Years of Anderson Localiza-

- tion. April. WORLD SCIENTIFIC; 2010. p. 43–71. Available from: https://doi.org/10.1142/9789814299084_0004.
- [7] In: Brownian motion: Einstein theory. Wikimedia; 2018. Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion.
- [8] Wegner F. Bounds on the density of states in disordered systems. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*. 1981 mar;44(1-2):9–15. Available from: <https://link-springer-com.proxy-um.researchport.umd.edu/content/pdf/10.1007/2FBF01292646.pdf><http://link.springer.com/10.1007/BF01292646>.
- [9] Abrahams E, Anderson PW, Licciardello DC, Ramakrishnan TV. Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions. *Physical Review Letters*. 1979 mar;42(10):673–676. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.673>.
- [10] Pruisken AMM. Universal Singularities in the Integral Quantum Hall Effect. *Phys Rev Lett*. 1988 Sep;61:1297–1300. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.1297>.
- [11] Störzer M, Gross P, Aegerter CM, Maret G. Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light. *Phys Rev Lett*. 2006 Feb;96:063904. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.063904>.
- [12] Chabanov AA, Stoytchev M, Genack AZ. Statistical signatures of photon localization. *Nature*. 2000 apr;404(6780):850–853. Available from: <http://www.nature.com/articles/35009055>.
- [13] Hu H, Strybulevych A, Page JH, Skipetrov SE, van Tiggelen BA. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics*. 2008 dec;4(12):945–948. Available from: <http://www.nature.com/articles/nphys1101>.
- [14] Schwartz T, Bartal G, Fishman S, Segev M. Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*. 2007 mar;446(7131):52–55. Available from: <http://www.nature.com/articles/nature05623>.
- [15] Basko DM, Aleiner IL, Altshuler BL. Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states. *Annals of Physics*. 2006;321(5):1126 – 1205. Available from: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491605002630>.